Matheseos fundamenta nova analytica,

Dissertatio,

quam

Consent. Ampliss. Facult. Philos. Lundens.

Præside

Mag. CAROLO JOH. D$^{\underline{s}}$ HILL,

Math. Prof.

pro Laurea defendit

LUDOVICUS G. TH. LÖFVENSKIÖLD,
Cand. Philos., Stipend. Ord. Equestr.

In Audit. Mathem. die xv Aprilis MDCCCXLVIII.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

I.

Lundæ,
typis Berlingianis,
MDCCCXLVIII.

Introductio
de operationibus Syntheticis et *Analythicis* (indeque ortis functionibus) in universum.

Res *quantitate* gaudere dicitur, quatenus mutationi sit obnoxia, necdum indolem exinde variet. *Quantum* igitur est id, quod mutationi vel determinationi est indifferens. Verum hoc ideo est *mutabile,* sed ejusmodi, quod sui tamen restat generis. Tota vero quantorum ars in mutatione perficienda vel determinanda versatur, sicuti ipsorum disciplina mutationis *leges* (formales) præscribit, quas vulgo *functionum* nomine insigniunt.

Ut vero hujusmodi doctrina existet, *quanta sui cujusvis generis dentur,* necesse est.

Huic vero *postulato* satisfit, ponendo dari aliquid x, quod quantum sit, saltem vel minimum. Inde enim reliqua hunc in modum gigni intelligantur. Ponas enim iterum idem x (attamen alibi loci vel temporis, si placet), quod tamen distinctionis causa per x' indicare lubet; jamque hoc et illud (x) aliquo vinculo (cujus signum sit $|$) jungi possunt, ita ex. gr. ut x' per x certo modo mutetur scil. in x'', ut inde aliud quantum x'' oriatur. Erit igitur hoc x'' novum quantum, cujus geneseos lex per $x|x'$ indicatur, ut sit $x'' = x|x'$. Hoc vero signum ($=$) valet, ipsum x'' ex x et x' modo dicto originem ducere, seu x'' idem quantitative valere ac $x|x'$, h. e. ac id quod certo quodam modo, quem signum $|$ indicat, ipsum x' per x mutando oritur. Jam vero si vinculum $|$ omnia diversitatis genera admiserit, $x|x'$ quodcunque lubet, erit, totamque ita quantorum multitudinem ha-

bebis. Quod si negaveris, sit vinculorum diversitas quam minima, vel etiam unicum ejusmodi dari concedas, tibique et quantorum molem infinitam et vinculorum multitudinem innummeram exhibebimus. Jungas enim hoc eodem vinculo utrumque x et x'', habebisque novum quantum $x'''=x|x''$, hocque quoties libet iteres, ut habeas itidem $x^{IV}=x|x'''$, $x^{V}=x|x^{IV}$, et cet. seu innumera quanta, quæ saltem quoad *formam* diversa sint, nempe $x'=x$, $x''=x|x'=x|x$, $x'''=x|x''=x|x|x$, $x^{IV}=x|x'''=x|x|x|x$ etc., si nempe $x|x$ in locum ipsius x'' suffecerimus, similiterque $x|x|x$ pro x''' etc. scripserimus, (ut ita genesis clarius ante oculos ponatur), id quod sane liceat, cum ex. gr. x'' et $x|x$ unum idemque quantum significent, reique, cujus duplex est signum, pro lubitu utrumque adhibere liceat, ita enim idem inde gigni poterit, quanquam ideo diversitas exclusa haud sit. Si vero accuratiores esse volumus, hanc substitutionem per ( ) ita indicare debemus: $x'''=x|(x|x)$, $x^{IV}=x|(x|(x|x))$ etc.; id quod sane quam maxime necessarium est, nisi hoc vinculum ejus fuerit indolis, ut $(x|x)|x=x|(x|x)$ sit, seu generalius $(x''|x')|x=x''|(x'|x)$, (i. e. $p|x=x''|q$, quoties fuerit $p=x''|x'$ et $q=x'|x$). Si igitur hujus non fuerit indolis, quanta aliis, eisque infinitis, modis gigni possunt. Sint enim $y=x|x'$, (scripto scilicet jam x' loco ipsius x'', seu justius, ponendo jam x' aliquatenus saltem a x diversum esse, id quod necessario liceat, cum jam x' ut x *mutatum* censemus) et $z=x'|x$, nec $x|x'=x'|x$, eruntque jam y et z diversa inter se; sintque ulterius $y'=y|x$, $y_{,}'=y|x'$, $'y=x|y$, $_{,}'y=x'|y$, similiterque $z'=z|x$, $z_{,}'=z|x'$, $'z=x|z$, $_{,}'z=x'|z$, et ita statim magnam quantorum diversorum habebis multitudinem, quam has iterum omnibus modis jungendo facile ultra sexcentium molem augebis. Præterea ipsum *numerum*, quæ hanc quantorum vel operationum multitudinem indicat, quantum fore, facile tibi persuaseris. De qua re postmodum. — At rem ultra omnem dubitationem demonstrare noluimus, sed potius animus nobis est, exinde ansam haurire, præcipuas *vinculorum* formas explicare, deindeque ipsorum origines et leges elicere. *Postulamus* igitur jam, quanta quæcunque et quotcunque dari, eaque vel saltem secundum quantitatem diversissima: unum

enim ipsum ex sua mutabilitate instar omnium sui saltem generis esse potest, quæ omnia sui sunt *valores* $(x, x', x'' \ldots)$, qui, secundum mutuam quantitatem ordinata, *contigui* sibi sunt.

Vidimus igitur postremam *formam*, qua $x|x'$ et $x'|x$ universim diversa sunt, ad tantam varietatem conducere, ut inde exordium disciplinæ nullum faciatur, vel saltem difficillimum, si mox hoc vinculum cum altero $\dagger$, quod $(x''|x')\dagger x$ ab $x''\dagger(x'|x)$ universim faciat diversum, jungendum foret. Optime igitur origo ducitur ex vinculo $|$ hujus indolis: $x'|x = x|x'$, quodque, si licuerit, etiam hujus fuerit: $(''x|x')|x = x''|(x'|x)$; disquirendumque nobis erit, numne inde alia gignantur vincula, quæ aliquo in Mathesi sint usus. Prævie vero has notiones observandas velimus:

1) Si x et x' quanta fuerint generali sua gaudentes proprietate, *mutabilitatem* dico, ideoque non nisi arbitrarie determinata fuerint, quo casu *variabilium arbitrariorum* nomine vulgo celebrantur, valoremque suum quemcunque specialem nancisci seu in quanta quæcunque determinata mutari potuerint, exque aliquo vinculo (cujus signum $?$ vel $|$ sit) juncta seu sese invicem aliquo modo mutando, aliud x'' produxerint, hoc ipsorum *functio* dicitur; id quod igitur ita indicetur: $x'' = x'|x$ vel $x'' = x'?x$. Eritque $|$ vel $?$ illius functionis signum, *operationem* indicans, qua ex ipsis x' et x datis aliud x'' obtinetur. In hoc opere alterum x' ut certo modo, quem illud signum indicat, in alterum x agens censeri potest: hacque de caussa illud *activum*, hoc vero *passivum* argumentum dicemus, vel etiam ordinis respectu illud *antecedens*, hoc *consequens*. Quanta enim variabilia, quæ functioni ingrediuntur, hujus *argumenta* vulgo dicuntur.

2) Sin vero istorum alterutrum, videsis x' omnimode determinatum fuerit ($= o$ vel $= 1$) vel saltem pro tale habendum, quod vulgo *constans* audit, tum x'' solius x erit *functio;* ut si $x' = o$ vel $= 1$ fuerit, erit $x'' = o|x$ vel $1|x$, cujus loco vulgo scribunt $x'' = Fx$, exsistente F functionis cujusdam signo, quod nobis semper littera *majuscula* (ex nomine mutuata, ut $Tx =$ tang. x) erit, vel etiam aliqua harum $f, \varphi, \psi, \gamma, \zeta, \gamma, \vartheta, \lambda,$ g, h, l, k, t nisi $o|$ vel $1|$ vel $a|$ vel $c|$ vel $c?$ adhibita fuerint, exsisten-

tibus *a, b, c* constantibus *). Vel etiam (x) aut $\widetilde{x}$ vel $[x]$ indefinitam ipsius x functionem indicat.

3) Quantum vero secundum x *constans* illud nobis erit, quod ipsius x functio haud sit (nisi forsan sub forma ficta), ideoque mutationi nulli obnoxium, utcunque x variet.

Ut si c idem omnino maneat, tametsi x in aliud quodvis x' transmutatum fuerit, erit c *constans* secundum x, id quod per $c = C(ox)$ vel $c = F(ox)$, quod legitur c non functio illius x seu functio nullius x, indicari potest.

4) Functionem unius argumenti (seu unius quanti variabilis) *simplicem* seu *singularem*, duorum *duplicem* vel *dualem*, plurium *pluralem* vel *multiplicem* dicemus. Sic $1 ? x$ vel etiam $c ? x$, quamdiu c haud mutatur, vel Fx simplex est; $x ? y$ *dualis* et $(x \mid y \mid z ? u)$ pluralis. Interdum vero et dualem ad plurales numerabimus. Functio vero $c \mid x$ occulte *dualis* est, et hujusmodi evadet, ut primum ipsum etiam c, quod antea constans erat, mutationi fit obnoxium. Sic et Fx occulte *pluralis* esse potest, si in signo F plures litteræ $a, b, c\,..$ quantitates quascunque, quæ tamen adhuc constantes sunt habitæ, indicantes, una cum variis operationum signis occultantur; ut si fuerit $Fx = a ? b \mid c \mid x$.

5) Si x'' fuerit functio ipsorum x et x', tum etiam inverso ordine utrumque horum ut functio alterius atque ipsius x'' considerari poterit *inversa* illius, scilicet si fuerit $x'' = x' \mid x$, erit in nostris signis *inversa consequentis* $x' = x''\overline{\mid x}$, atque . . . . . *antecedentis* $x = \overline{x' \mid} x''$; similiterque si $x'' = x' \text{¿} x$ fuerit, erit $x' = x''\overline{\text{¿} x}$ et $x = \overline{x' \text{¿}} x''$.

6) Si y fuerit functio solius x, erit retro x functio quædam ipsius y, quæ etiam istius *inversa* dicetur. Et quidem, si fuerit $y = 1 ? x$ (vel $= c ? x$,) erit inversa $x = \overline{1 ?} y$ (vel $= \overline{c ?} y$); atque $x = \overline{F} y$ seu $= \mathfrak{F} y$, si $y = Fx$.

---

*) Cfr. Crelle Journ. für Math. III. pag. 111.

eisdem quantitatibus eandem semper quantitatem produxerit; tum valores quantitatum x, x' et x'' modo obtenti necessario conveniant, ideoque erit $x'\overset{=}{|}x = x'|x = \overline{\overline{x'}|}x$, $\overline{x''\lceil}\,x' = \overline{x'|}x''$, et $\overline{\overline{x}\,|x''} = x''\lceil x$. Sin vero signa hæc æquivoca fuerint, tum hæ tamen formulæ eo valebunt, ut saltem unus alterius valor unum alterius æquetur. Attamen ne jam ab initio nimia distrahamur varietate, (de cujus existentia ne quidem adhuc aliquid certi noverimus), ponamus vel ipsam ad vincula $|$ & $_{\mathfrak{z}}$ (& $_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}$ etc.) haud pertinere, (vel saltem per $\overline{|}$ intelligi certum aliquod signorum $|_1$, $|_2$ et similium; ut jam ad tempus concedatur *axioma:*

VII) Si $a = b$ fuerit, erit $c|a = c|b$ atque $a|c = b|c$ (seu functio æqualium æqualis), similiterque ad signa inversionis, ut ita inverso ordine, si $c|a = c|b$ vel $a|c = b|c$ fuerit, sit $a = b$; (seu si $a = b$, sit et $\overline{c|}a = \overline{c|}b$ et $a|\overline{c} = b|\overline{c}$) seu universim functio eadem (directa vel inversa) æqualium æquales suppeditet valores; sc. $Fa = Fb$, si $a = b$; ubi F loco $c|$ vel $\overline{c|}$ vel $|\overline{c}$) scribitur. Ejusmodi vero functiones *uniformes* dicuntur. Hoc vero concesso, vinculum $|$ non tam late patebit ac in casu generali, quo tantummodo argumentari posset, si $a = b$, fore $c|a$ vel $= c|b$ vel etiam $= c|\beta$, existente β et b diversa. Hoc vero ad dictam diversitatem pertinebit.

Hoc axioma aperte pluribus æquivalet. Omnia vero hæc axiomata postulanda non sunt, quia nonnullis ipsorum concessis, reliqua inde facile eliciuntur.

Sic ex. gr. si fuerit concessum, tum $a|c = b|c$ fore, cum $a = b$, erit et $\overline{a}|c = \overline{b}|c$. Fiat enim $a|c = e$, eritque et $b|c = e$, ideoque $\overline{a}|e = c = \overline{b}|e$.

Similiter ex $c|a = c|b$, elicitur $e|\overline{a} = e|\overline{b}$. Sed omnia hæc *axiomata æqualitatis* ita demonstrari possunt.

Sit enim $a = b$, contendimusque fore 1) $c|a = c|b$, 2) $a|c = b|c$,

3) $c|\overline{a} = c|\overline{b}$, 4) $\overline{a}|c = \overline{b}|c$, 5) $\overline{c}|a = \overline{c}|b$ et 6) $a|\overline{c} = b|\overline{c}$. Faciamus enim $a = \alpha|c$, eritque et $b = \alpha|c$, ideoque $a|\overline{c} = \alpha = b|\overline{c}$, et $\overline{\alpha}|a = c = \overline{\alpha}|b$; Quæ sunt 6) et 5). Faciamus deinde $a = c|\overline{\alpha} = b$, eritque similiter $a|\overline{\overline{\alpha}} = c = b|\overline{\overline{\alpha}}$, et $\overline{c\lceil}\, a = \alpha = \overline{c\lceil}\, b$, seu $a|\alpha = b|\alpha$ et $\overline{a}|c = \overline{b}|c$; quæ sunt 2) et 4). Tandemque faciamus $a = \overline{\alpha}|c = b$, eritque $\overline{\overline{\alpha}}|a = c = \overline{\overline{\alpha}}|b$, et $\overline{\overline{a}\,}|c = \alpha = \overline{\overline{b}\,}|c$, seu $\alpha|a = \alpha|b$, et $c|\overline{a} = c|\overline{b}$; Quare etiam 1) et 3) demonstrata sunt.—Ex hac vero ipsa demonstratione patet, hæc axiomata non latius valere, ac ipsæ IV formulæ modo antea (p. 5.) propositæ. Quæ si indistincte valuerint, etiam hæc axiomata strictim valebunt. Sin vero operatio directa ($|$) vel alterutra inversarum ($\overline{\;\;}|$ vel $|\overline{\;\;}$) multiformis fuerit, seu ejusmodi, ut ex. gr. $a\sqrt{\;}b$ plures (n) diversas quantitates significaverit, scil. has $a\sqrt{\;}_0 b$, $a\sqrt{\;}_1 b$, $a\sqrt{\;}_2 b, .. a\sqrt{\;}_{n-1} b$, fueritque $b = \beta$, tum erit et $a\sqrt{\;}\beta$ etiam multiformis et significabit $a\sqrt{\;}_0\beta$, $a\sqrt{\;}_1\beta$, $a\sqrt{\;}_2 b$ ... vel $a\sqrt{\;}_{\overline{n-1}}\beta$, tumque etiam æquatio $a\sqrt{\;}b = a\sqrt{\;}\beta$ valebit, si hanc ita intellexerimus, ut idem valeat ac si dixerimus, aliquem illorum n valorum ipsius $a\sqrt{\;}b$ æqualem alicui horum τȣ $a\sqrt{\;}\beta$ fore, ut $a\sqrt{\;}_1\beta = a\sqrt{\;}_r b$. Si ad hæc attenderis, etiam formulæ nostræ latius patebunt, quam primo obtutu videbantur.

Præterea limitatio rei necessaria sponte se offert; puta si ex. gr. operatio | ejusmodi fuerit, ut valor $\alpha|c$, quem ex quantitatibus α et c suis ex regulis elicit, semper inter limites o et A inclusus fuerit, his α et c exsistentibus quibusvis vel eis, quæ isti operationi subjici possint; tum necessario a et b intra eosdem limites inclusi sint, ut rigorose demonstrari possit, si fuerit $a = b$, fore et $\overline{c}|a = \overline{c}|b$ et $a|\overline{c} = b|\overline{c}$. Alias enim $a = \alpha|c = b$ ponere, certe non liceret. Fieri tamen poterit, ut formulæ, si huic naturali limitationi adversatus fueris, nihilominus ita interpretari possint, ut etiam tum valeant. Sed tota hæc res ad theoriam *imaginarii* pertinebit.

Sin vero $y=c,x$ fuerit et $x=\overline{c},y$, erit et $\overline{c},y=\overline{c},(c,x)$, ideoque (uno saltem casu) $\overline{c},(c,x)=x$; seu si $y=Fx$, et $x=\overline{F}y$, erit quoque $\overline{F}(Fx)=x$.

7) Sed interdum functiones jam inversæ $x''|\overline{x}$ et $\overline{x'}|x''$ iterum invertendæ sunt, id quod ex eodem principio, (quod, ut vides, in eo consistit, ut littera tollenda copulaque data $|$ (vel ?) nova lineola transversa (—) junctæ in alteram partem migrentur), significari potest. Hæc vero signa eo quidem mutari possunt, ut loco $y|\overline{x}$ scribatur $y|{-}x$ vel etiam contracte $y\lceil x$, (seu $y\lceil x$) atque $x{-}|y$ vel $x\neg y$ pro $\overline{x}|y$, ubi igitur lineola (—) supra vel inter vinculum et ipsum x interposita, quæ ad utrumque æquo jure refertur, hæc junctim transposita fuisse, indicat. Vincula inversionis ita simplicitatem ($\neg$ et $\lceil$) et ad quantitates complexas transmigrandas aptiorem formam adipiscuntur. Si igitur $x|z=y$ fuerit, erit inverse $x=y|\overline{z}=y|{-}z=y\lceil z$, atque $z=\overline{x}|y=x{-}|y=x\neg y$. Jam vero $y\lceil z$ ut functio data ipsorum y et z spectari potest, quæ $=x$ posita, inversim tum y in x et z, tum z in x et y suppeditat, quod ex principiis jam positis ita indicandum est:
$y=x\lceil\overline{z}=x\lceil{-}z$, atque $z=\overline{y\lceil x}=y{-}\lceil x$; seu etiam in antecedentibus signis $y=x|\overline{\overline{z}}$ et $z=\overline{y|\overline{x}}$ seu $z=y{-}(|{-}x)$.

Si igitur fuerit $x'=x''|\overline{x}$, erit inverse $x''=x'|\overline{\overline{x}}$ atque $x=\overline{x''\overline{\lceil}x'}$; sin vero $x=\overline{x'}|x''$ fuerit, erit inverse $x''=\overline{\overline{x'}}|x$ atque $x'=\overline{x{-}|x''}$. Quoniam vero æquationes $x''=x'|x$, $x'=x''|\overline{x}$ et $x=\overline{x'}|x''$ per hypothesin junctim valent, sicuti etiam bis ternæ nuper propositæ, erit
1) $x'|\overline{\overline{x}}=x''=x'|x$, 2) $\overline{x''\lceil x'}=x=\overline{x'}|x''$, 3) $\overline{\overline{x'}}|x=x''=x'|x$,
4) $\overline{x{-}|x''}=x'=x''|\overline{x}$, seu in postremis signis 1) $x'\overline{\lceil x}=x'|x$
2) $x''{-}\lceil x'=x'\neg x''$ 3) $x'{-}{-}|x=x'|x$ 4) $x\neg{-}x''=x''\lceil x$; ideoque "lineola "inversionis (—) bis similiter posita (in 1) et 3)) se ipsam tollit, diversi-

"mode vero iterum ponenda (ut in 2) et 4)) formulæ lectionem reversam "concedit." Hæc vero formularum concinnitas, (cujus, ne signorum varietate et multiplici distinctione obruamur, quam maxime est opus), eo nititur, quod æquationes dictæ junctim valeant; id quod sequentia *axiomata* constituit:

I et II) Si fuerit $x'' = x'|x$, erit (ex definito) $x' = x''\overline{|x}$ et $x = \overline{x'|}x''$.

III et IV) Et vice versa, si fuerit $x' = x''\overline{|x}$, erit $x'' = x'|x$, ideoque $x = \overline{x'|}x''$, vel saltem (ex I et II et definitione) $x'' = x'\overline{\overline{|x}}$ atque $x = \overline{\overline{x''|}}\,x'$.

V et VI) Sique fuerit $x = \overline{x'|}x''$ vel $x'^{-}|x''$, erit $x'' = x'|x$ atque inde $x' = x''\overline{|x}$ vel saltem $x'' = \overline{\overline{x'|}}x$ seu $\overline{x'^{-}|}x$ atque $x' = x\,\overline{\overline{|x''}}$ seu $\overline{x^{-}|}x''$.

Fingi enim poterit copula | ejusmodi, ut non modo quanta x' et x secundum ejus leges juncta ipsum x'' producant, sed etiam alia, ut a et x, vel x' et b, ut sit $x'' = a|x$ et $x'' = x'|b$, ideoque (ex I et II) invertendo $x''\overline{|x} = a$ et $\overline{x'|}x'' = b$, ut ita $x''\overline{|x}$ non necessario x', nec $\overline{x'|}x''$ ipsum x significent, sed etiam a et b et forsan plura. Tum vero foret et $x' = x''\overline{|x}$ et $a = x''\overline{|x}$, nec $x' = a$, ideoque $x''\overline{|x}$ non unius foret sensus; simileque ad reliquas formas accidere posset. Quod si acciderit, formulæ $y\overline{\overline{|x}} = y|x$, (vel $\overline{\overline{y|}\,x} = x|y$, $\overline{\overline{x|}}y = x|y$ et $\overline{x\,\overline{|y}} = y\overline{|x}$) hic erit sensus, ut unicus omnium valorum, qui universim per $y\overline{\overline{|x}}$ repræsentantur, reductus ille $y|x$ sit, (sicuti $\overline{x|}y$ unus ex his $\overline{y\lceil}\,x$ seu $y^{-}\lceil x$ etc.).

Nihil vero impedit, quo minus ad diversos quantorum ex inversione ortos valores, diversa fingamus signa: Sic, si quærendo x ex æquatione $x'' = x'|x$, hos invenerimus ipsius valores $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$; ipsi ita distingui poterunt:

$$x_1 = \overline{x'|}_1 x'',\ x_2 = \overline{x'|}_2 x'',\ x_3 = \overline{x'|}_3 x'', \ldots\ldots x_n = \overline{x'|}_n x''.$$

Vel etiam sæpissime, si signum $y\overline{\overline{|x}}$ æquivocum fuerit, ipsi $y|x$ æqualem multiplicitatem tribuere possumus, etc.

Si igitur nulla diversitas ab initio adfuerit, sed unaquæque operatio ex